Is er afstemming tussen economie en wiskunde?

Ab van der Roest

In *Euclides* 92-4 was te zien dat er een groot verschil is tussen de manier waarop in het vmbo procenten werden behandeld in de economie- en de wiskundeboeken. Hoe zou dat zijn in de bovenbouw havo-vwo? Ab van der Roest ging eerst in gesprek met zijn economiecollega's. Daarvan staat het verslag in *Euclides* 92-5, vervolgens ging hij in gesprek met de leerlingen, waar dit een verslag van is.

Bij het schrijven van dit artikel en na het bespreken hiervan met de docent economie, werd ik benieuwd of leerlingen makkelijk schakelen tussen economie en wiskunde. Ervaren zij een vorm van samenhang, of zijn wiskunde en economie gescheiden werelden voor hen? Ik heb daarom een klein onderzoekje gedaan in 6 vwo, in de laatste les voor de laatste toets, eigenlijk de laatste les op de middelbare school.

In de bijlage staat de lijst met vragen die ik hen heb voorgelegd. Het onderzoek is uitgevoerd onder 37 leerlingen, die allen les hebben van dezelfde docent. Omdat economie een keuzevak is, zijn er naast E&M-leerlingen ook leerlingen met andere profielen. De wiskundekeuze is ook niet gelijk (zie tabel 1).

	wiskunde A	wiskunde B	wiskunde C	totaal
CM	2		1	3
EM	20	5		25
NG	1	1		2
NT		7		7
totaal	23	13	1	37

tabel 1

Er zijn 16 van de 37 leerlingen die ook het verwante vak management en organisatie (M&O) volgen, maar de antwoorden van deze leerlingen lijken niet af te wijken van de leerlingen die geen M&O volgen.

De leerlingen zijn gevraagd om van de twee citaten in het artikel verbanden met wiskunde te noemen. Eén leerling zag geen enkel verband, maar de andere leerlingen noemden wiskundige concepten als: formules, grafiek, snijpunt bepalen, afgeleide, rekenen, maximum/minimum, top, parabool, oplossen van vergelijkingen, optimaliseren. Eén leerling verwoordde het als lineaire functie met context. De herkenning dat wiskunde toegepast wordt in andere vakken is er dus wel.

Daarna gaf ik de definitie van marginale kosten en vroeg aan de leerlingen of het een differentiequotiënt, een afgeleide functie of geen van beide is. De antwoorden zijn verwerkt in tabel 2:

MK is	d*q*	afgeleide	geen van beide	totaal
wiskunde A	4	15	4	23
wiskunde B	1	11	1	13
wiskunde C	1			1
totaal	6	26	5	37

tabel 2

In de gegeven definitie is duidelijk sprake van de toename van de kosten als het aantal met één toeneemt. Dus $\frac{\Delta TK}{(q+1)-q} = \frac{\Delta TK}{\Delta q}$ hetgeen te herkennen is als een differentiequotiënt. Opvallend is dat vijf leerlingen hier geen wiskunde in herkennen. Het is dus voor hen *sec* een economiebegrip. Dat slechts zes leerlingen het differentiequotiënt herkennen is niet zo opvallend. Uiteindelijk worden de marginale kosten vaak benaderd met de afgeleide functie. Wel weer opvallend is dat wiskunde A- en wiskunde C-leerlingen de marginale kosten relatief vaker als differentiequotiënt zien dan de wiskunde B-leerlingen (20,8% ten opzichte van 7,7%). Een mogelijke verklaring hiervoor is dat bij wiskunde A en wiskunde C het differentiequotiënt meer aandacht krijgt.

Ten slotte werd de leerlingen gevraagd naar een wiskundig bewijs van maximale winst als $MO = MK$. Als aanwijzing kregen ze dat het bewijs met behulp van differentiëren geleverd kan worden, uitgaande van $TW = TO - TK$[n].

Tabel 3 geeft weer hoe leerlingen deze opgave maakten.

aantal afleiding 1					
	geen idee	niet	niet goed	goed	totaal
wiskunde A	5	8	10		23
wiskunde B		0	8	5	13
wiskunde C		1			1

tabel 3

Hier valt op dat wiskunde B-leerlingen het beter doen dan wiskunde A-leerlingen; vijf van de dertien leerlingen vinden een correcte afleiding (38,5%). Van de leerlingen met wiskunde A had geen enkele leerling een oplossing gevonden. Tien leerlingen met wiskunde A en acht met wiskunde B deden wel een poging, maar het resultaat was niet goed. Veelal bleven ze steken in het opschrijven van wat tekst, of van formules, maar het differentiëren werd niet gebruikt. In totaal waren er veertien leerlingen die helemaal geen idee hadden en er ook niet aan begonnen. Dit waren allen wiskunde A- en wiskunde C-leerlingen en een bijbehorend percentage is 58,3%. De wiskunde B-leerlingen voelden zich waarschijnlijk meer uitgedaagd en deden allen een poging om een correcte afleiding te vinden.

De tweede afleiding die werd gevraagd, was de afleiding van *totale winst* (*TW*) = *totale opbrengsten* (*TO*) **−** *totale kosten* (*TK*), zie tabel 4.

aantal afleiding 2					
	geen idee	niet	niet goed	goed	totaal
wiskunde A	5	13	5		23
wiskunde B	1	4	8		13
wiskunde C		1			1
totaal	6	18	13	0	37

tabel 4

De afleiding van deze bewering is duidelijk een stap te ver. 23 leerlingen hadden niets, of de opmerking dat ze geen idee hadden hoe te beginnen. Dertien leerlingen deden een poging waarbij één leerling begon met een voorbeeld en in de richting van het goede antwoord kwam. Uit de antwoorden die de leerlingen gaven, concludeer ik dat de totale kosten functie en de gemiddelde totale kosten functie, door leerlingen niet als functies worden opgevat. De relatie tussen de functie in de vorm van een formule en in de vorm van een functievoorschrift wordt niet herkend. Differentiëren hoort bij de functies met een functievoorschrift en niet bij de functies in formulevorm.

Conclusie

Het onderzoekje toont aan dat leerlingen uit deze groep wiskundige concepten kunnen benoemen in bepaalde economische situaties. Of het benoemen van deze concepten correct gebeurt, is twijfelachtig gezien de vraag naar differentiequotiënt en afgeleide, en het niet kunnen toepassen van de concepten in de afleidingen.

Ik ben me ervan bewust dat dit onderzoek niet representatief is voor alle leerlingen, daar het onderzoek op één school uitgevoerd werd en alle leerlingen dezelfde docent hebben. Dit onderzoek is alleen schriftelijk uitgevoerd, en daarom moet ik voorzichtig zijn met de conclusies. Mogelijk dat leerlingen anders gereageerd zouden hebben in een interview. Op papier moet alles goed zijn, maar uitgesproken gedachten zeggen misschien meer. Ondanks deze opmerkingen is het aan te bevelen dat bij wiskunde en bij economie deze afleidingen aandacht krijgen. Het leren in samenhang zal hierdoor gestimuleerd worden.

De aanleiding van het onderzoek en van het artikel was een gesprek met een docent economie. Zulke gesprekken zijn zeldzaam en dat is jammer. De samenhang tussen wiskunde en economie is niet zo duidelijk voor docent en leerling. Er zijn nog meer voorbeelden te bedenken waar we elkaar, en dus ook de leerling, kunnen helpen. Ik denk aan het opstellen van vergelijkingen en het tekenen van grafieken.

In dit artikel heb ik alleen aandacht gegeven aan economie, maar met natuurkunde en scheikunde zijn ook onderwerpen te vinden.

Bijlage

Enquête voor leerlingen 6e klas vwo

De enquête bestaat uit twee delen. De vragen 1 tot en met 7 kun je snel beantwoorden, maar bij vraag 8 en 9 vraag ik een afleiding.

Bedankt voor je medewerking,

A.B. van der Roest (docent wiskunde)

Kruis aan wat van toepassing is:

1. Ik volg het profiel:
   a) C&M b) E&M c) N&G d)N&T

2. Ik heb als bijvak M&O: a) ja b) nee

3. Ik volg voor wiskunde: a) wis-a b) wis-c c) wis-b

4. Lees eerst de volgende tekst:

De MK-lijn snijdt de GTK-lijn altijd in haar minimum!

Uitleg: De marginale kosten zijn de extra totale kosten van een (eenheid) product meer. Zolang deze extra kosten (MK) lager zijn dan de GTK van de voorgaande eenheden zal de GTK dus dalen. Als de kosten van een extra eenheid (MK) hoger zijn dan gemiddeld zal de GTK lijn stijgen. Als de kosten van een extra eenheid (MK) gelijk is aan de GTK van de voorgaande, zal de GTK gelijk zijn aan de MK. Dit snijpunt is een minimum omdat de TK eerst minder dan evenredig stijgen (de GTK dalen dan dus) en vervolgens meer dan evenredig (de GTK stijgt dan).

Bestaat er een relatie tussen bovenstaande tekst en wiskunde?

Zo ja, welke?

5. Lees eerst de volgende tekst:

Wanneer ondernemers streven naar maximale winst, produceren ze tot het punt waarbij de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten (MO = MK).

Immers, wanneer ze een extra eenheid produceren, zijn de extra kosten (MK) groter dan de extra opbrengsten (MO) van die eenheid.

Bestaat er een relatie tussen bovenstaande tekst en wiskunde?

Zo ja, welke?

6. Lees eerst de volgende tekst:

De winst is maximaal wanneer de totale winst (TW) op haar hoogtepunt is (top van de parabool) en dus het verschil tussen TO en TK het grootst is.

Immers, Totale winst (TW) = Totale opbrengsten (TO) - Totale kosten (TK).

Bestaat er een relatie tussen bovenstaande tekst en wiskunde?

Zo ja, welke?

7.

De marginale kosten zijn de extra totale kosten die een bedrijf maakt als de productie met één product uitgebreid wordt. Deze marginale kosten zijn vooral van belang om te bepalen of dat ene product nu wel of niet gemaakt moet worden.

Welk wiskundig concept hoort het beste bij marginale kosten?

Kies uit: a) differentiequotiënt b) afgeleide functie c) geen van beide

8. De winst is maximaal als $MO = MK$.
Dit kun je met behulp van differentiëren wiskundig aantonen.
(Ga uit van $TW = TO - TK$.)
Geef dit bewijs.

9.

De MK-lijn snijdt de GTK-lijn altijd in haar minimum!

Uitleg: De marginale kosten zijn de extra totale kosten van een (eenheid) product meer. Zolang deze extra kosten (MK) lager zijn dan de GTK van de voorgaande eenheden zal de GTK dus dalen. Als de kosten van een extra eenheid (MK) hoger zijn dan gemiddeld zal de de GTK lijn stijgen. Als de kosten van een extra eenheid (MK) gelijk is aan de GTK van de voorgaande, zal de GTK gelijk zijn aan de MK. Dit snijpunt is een minimum omdat de TK eerst minder dan evenredig stijgen (de GTK dalen dan dus) en vervolgens meer dan evenredig (de GTK stijgt dan).

Dit kun je wiskundig bewijzen. Geef dit bewijs.

Bedankt voor je medewerking.